数理解析研究所講究録
487巻 1983年 65-78

穴あきレンズ空間のR^4への埋蔵について

神戸大理　細川藤次 (Fujitsugu HOSOKAWA)
神戸大理　鈴木晋一 (Shin'ichi Suzuki)

3次元多様体であるレンズ空間が4次元ユークリッド空間R^4に埋蔵できないことはすでに良く知られている。[3], [6]
また，穴あきレンズ空間$L(2n, q)_0$はR^4に埋蔵できないが[1]，穴あきレンズ空間$L(2n+1, q)_0$はR^4に埋蔵することができることもすでに知られている[9]。ここで，穴あきレンズ空間$L(p, q)_0$は、レンズ空間$L(p, q)$から1点の近傍を除いたものである。

Vをsolid torusとし，kを∂V上の(p, q)型結び目とする。すなわち，p, qは整数で，mを∂V上のmeridean，lをlongitudeとすると，kは∂V上で$pl+qm$にホモローグな単純閉曲線である。kをattaching 1-sphereとするVの2-handleを$h^2(p, q)$とすると，穴あきレンズ空間$L(p, q)_0$はHeegaard分解$V \cup h^2(p, q)$で表される。[7]

また，$L(p, q)_0$と$L(p', q')_0$とが同相になるのは，$p=p'$で

$$q \equiv \pm q' \pmod p \quad \text{または} \quad qq' \equiv \pm 1 \pmod p$$

が成立することであることも良く知られている。

この論文では、R^4に埋蔵された穴あきレンズ空間が，R^4の中でどんな位置にあるかを調べることを目的とする。

ϕを$L(p,q)_0 \equiv V \cup h^2(p,q)$ からR^4への同相写像とする。$\phi(V)$はR^4の中のsolid torusであるが，これはR^4におけるambient isotopy $\{\eta_u\}_{u \in I}$によって、超平面$R^3[0]$の中の平凡なsolid torus $V_0 = \eta_1(\phi(V))$に移すことができる。

ここで，R^4を$R^3 \times [-\infty, \infty]$と考え，$R^3 \times (t)$を$R^3[t]$で表すことにする。

m_0を∂V_0のmeridean，l_0を∂V_0のprefered longitudeとする。つまり，m_0はV_0の中で円板の境界となり，l_0は$R^3[0] - \mathrm{Int}\,V$で円板の境界となっているとする。

このとき，$\eta_1\phi(m) = m_0$，$\eta_1\phi(l) = l_0 + \alpha m_0$ （α：整数）が一般に成り立つ。

このとき，2-handle $\eta_1\phi h^2(p,q)$のV_0へのattaching 1-sphereをk_0とすると，k_0は∂V_0上の$(p, q+\alpha p)$型結び目となる。

すなわち、$\eta_1\phi L(p,q)_0$は，m_0, l_0に関してHeegaard分解$V_0 \cup h^2(p, q+\alpha p)$を持つことがわかる。

$h^2(p, q+\alpha p)$を$D^2 \times [-1,1]$と考えると，attaching 1-sphere k_0は$D^2 \times 0$の境界で，$D^2 \times 0$は$R^4 - \mathrm{Int}\,V_0$にproperに埋蔵

している円板となっている。

$\eta_1\phi L(p,q)_0 \equiv V_0 \cup h^2(p, q+\alpha p)$ が R^4 の中でどんな位置にあるかを調べるためには、2-handle $h^2(p, q+\alpha p)$ が、すなわち、$D^2\times 0$ が R^4 の中でどんな位置にあるかを調べればよいことがわかる。

定理 1. 穴あきレンズ空間 $L(p,q)_0$ が R^4 に埋蔵されているとすると、埋蔵写像 ϕ は次の条件をみたすようにすることができる。

(1) $\phi L(p,q)_0$ は Heegaard 分解 $V_0 \cup h^2(p, q+\alpha p)$ を持つ。V_0 は $R^3[0]$ の平凡な solid torus で、2-handle $h^2(p, q+\alpha p)$ の attaching 1-sphere k_0 は ∂V_0 上の $pl_0 + (q+\alpha p)m_0$ にホモローグな単純閉曲線である。

ここで、l_0, m_0 は ∂V_0 上の、それぞれ prefered longitude, meridean である。

(2) 2-handle $h^2(p, q+\alpha p)$ を $D^2\times[-1,1]$ とすると、$k_0 = \partial D^2\times 0$ で、$D^2\times 0$ は $R^4 - \mathrm{Int}\,V$ の中の locally flat な円板で、次の条件をみたしている。

- maximal bands $\subset R^3[2]$
- minimal bands $\subset R^3[-1] \cup R^3[1]$
- saddle bands $\subset R^3\times(1,2)$
- $(D^2\times 0)\cap R^3[0] = k_0 \cup O_1 \cup \cdots \cup O_\mu$

ここで，$O_i\,(i=1,2,\cdots,\mu)$ は meridean m_0 を V_0 の外へ少しずらした単純閉曲線で，$O_1\cup\cdots\cup O_\mu$ は平凡なからみ目になっている。図(1)

(3) $(D^2\times[-1,1])\cap R^3[t]=((D^2\times 0)\cap R^3[t])\times[-1,1]$，$(-\infty<t<\infty)$

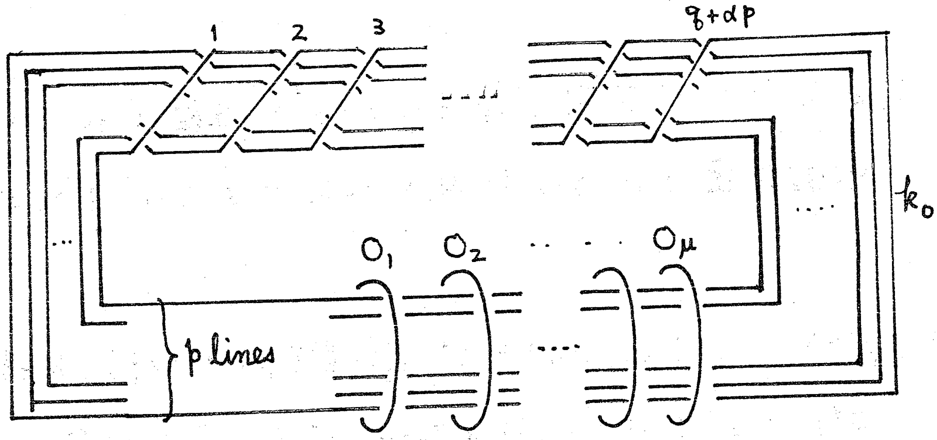


図 1　からみ目 $\ell(p,q+\alpha p,\mu)$

定理 1 の証明は省略する。

R^4 の中に埋蔵されている穴あきレンズ空間 $L(p,q+\alpha p)_0$ が定理 1 の条件をみたしているとき，$L(p,q+\alpha p)_0\equiv V_0\cup h^2(p,q+\alpha p)$ は R^4 中の標準的位置にある，ということにする。また，定理 1 に出てくるからみ目 $k_0\cup O_1\cup\cdots\cup O_\mu$ を $\ell(p,q+\alpha p;\mu)$ で表し，$L(p,q+\alpha p)_0$ のからみ目，ということにする。

$\ell(p,q+\alpha p;\mu)$ は $R^3\times[0,\infty)$ で *locally flat* な穴あき円板 $(D^2\times 0)\cap R^3\times[0,\infty)$ の境界となっている。つまり，*a slice link in the weak sense* [2] になっている。

さて, $L(p,q)_0$ を R^4 で標準的位置にある穴あきレンズ空間で, Heegaard分解 $V_0 \cup h^2(p,q)$ を持ち, $h^2(p,q)$ を $D^2 \times [-1,1]$, $L(p,q)_0$ のからみ目 $l(p,q;\mu) = k_0 \cup O_1 \cup \cdots \cup O_\mu = \partial((D^2 \times 0) \cap R^3 \times [0,\infty))$ とする。

$$l^+(p,q;\mu) = k_0^+ \cup O_1^+ \cup \cdots \cup O_\mu^+ = \partial((D^2 \times 1) \cap R^3[0,\infty))$$

$$l^-(p,q;\mu) = k_0^- \cup O_1^- \cup \cdots \cup O_\mu^- = \partial((D^2 \times -1) \cap R^3[0,\infty))$$

とすると, これらは $R^3[0]$ 内のからみ目であり,

$$\mathrm{link}\,(l^+(p,q;\mu),\ l^-(p,q;\mu)) = 0$$

が成立している。また, $O^+ = O_1^+ \cup \cdots \cup O_\mu^+$, $O^- = O_1^- \cup \cdots \cup O_\mu^-$ はそれぞれ, $R^3(-\infty,0]$ 内で, μ この円板の境界で, たがいに交っていないから,

$$\mathrm{link}\,(O^+, O^-) = 0$$

また, k_0^+, k_0^- は, それぞれ (p,q) 型の torus 結び目で, O_i^+, O_i^- は図1の O_i と同じ位置にあるから,

$$\mathrm{link}\,(k_0^+, k_0^-) = \varepsilon p q \quad (|\varepsilon| = 1)$$

$$\mathrm{link}\,(k_0^+, O_i^-) = \mathrm{link}(O_i^+, k_0^-) = \varepsilon_i p \quad (|\varepsilon_i| = 1,\ i = 1, \cdots, \mu)$$

が成り立つ。したがって

$$\begin{aligned}
&\mathrm{link}\,(l^+(p,q;\mu),\ l^-(p,q;\mu)) \\
&= \mathrm{link}\,(k_0^+, k_0^-) + \sum_{i=1}^{\mu}\left(\mathrm{link}(k_0^+, O_i^-) + \mathrm{link}(O_i^+, k_0^-)\right) + \mathrm{link}(O^+, O^-) \\
&= \varepsilon p q + 2p\sum_{i=1}^{\mu}\varepsilon_i = p\left(\varepsilon q + 2\sum_{i=1}^{\mu}\varepsilon_i\right) = 0
\end{aligned}$$

となる。このことから次の定理が成立する。

定理2　$L(p,q)_0 \equiv V_0 \cup h^2(p,q)$ が R^4 で標準的位置にある穴あきレンズ空間で，$L(p,q)_0$ のからみ目が $l(p,q;\mu) = k_0 \cup O_1 \cup \cdots \cup O_\mu$ のとき，次の(1)，(2)が成立する。

(1)　q は偶数である。

(2)　$q = 2m$ とすると $\mu = |m| + 2d$，$(d \geq 0)$ で

$\mathrm{link}(k_0, O_i) = -p \quad (i = 1, \cdots, |m| + d)$

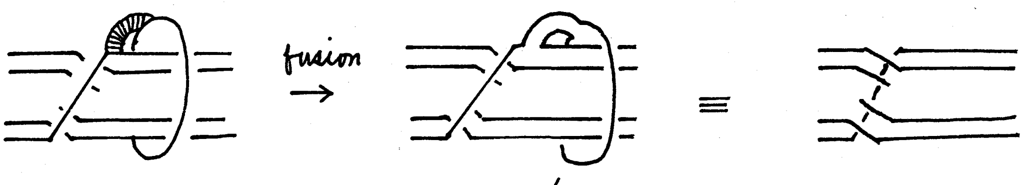
$\mathrm{link}(k_0, O_i) = p \quad (i = |m|+d+1, \cdots, \mu)$

この定理から，次の系を得る。

系　穴あきレンズ空間 $L(2n,q)_0$ は R^4 に埋蔵することはできない。

今迄の考察から，$L(p,q)_0$ が R^4 に標準的位置に埋蔵されていることと，からみ目 $l(p,q;\mu)$ が *a slice link in the weak sense* になることと同値になることがわかる。

さて，図2のような *fusion* により，上を通る線を下を通る線にすることができる，という操作を考えると，$l(p,q;\mu)$ が *a slice link in the weak sense* ということと，$l(p,q+2p;\mu+p)$ がそうなることと同値であることが容易にわかる。



図(2)

このことから、次の定理を得る。

定理3　$L(p,q)_0 \equiv V_0 \cup h^2(p,q)$ が R^4 で標準的位置にあるならば、$L(p,q\pm 2p)_0 \equiv V_0 \cup h^2(p,q\pm 2p)$ も標準的位置に実現することが可能である。

定理4，$2n+1$，$2m$ がたがいに素な整数のとき，

(1) $L(2n+1,2m)_0 \equiv V_0 \cup h^2(2n+1,2m)$ は R^4 の標準的位置に実現することができる。

(2) からみ目 $l(2n+1,2m;|m|+2d)$ が a slice link in the weak sense となる整数 $d \geqq 0$ が存在する。

そこで，次の問題が出てくる。

問題　どんな整数 d に対して $l(2n+1,2m;|m|+2d)$ が a slice link in the weak sense となるか？

この問題がわかると、穴あきレンズ空間の境界となる2次元結び目のクラスがわかることになる。

しかし，一般的な解答は相当難しいようであるが，$d=0$ のときにある程度その本質があるように思われる。

ここでは、$d=0$ のとき、ある条件付きで解けることがわかることを示す。定理の証明は論文［10］を参照してもらうことにして，例で考え方の大筋を示すことにする。

$\ell(2n+1, 2m; |m|)$ が a slice link in the weak sense ならば,
$\ell(2n+1, 2m+2\alpha(2n+1); |m|+|\alpha(2n+1)|)$ もまたそうなることから,

$$-|2n+1| < 2m < |2n+1|$$

としてよく, また, torus結び目の性質より

$$0 < 2m < |2n+1|$$

のときを考えれば十分である。そこで,

$$2n+1 = 2am \pm r \quad , a>0,\ 0<r<m\ ,\ r\text{と}2m\text{は素}$$

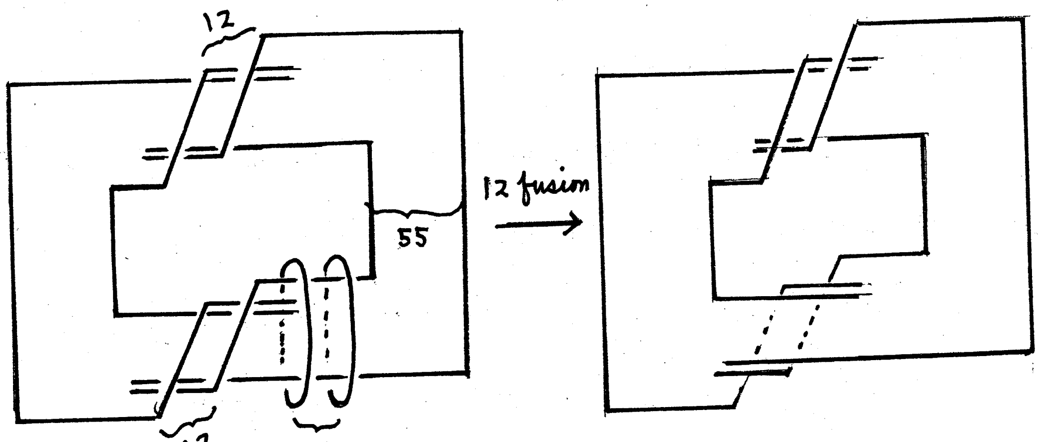
となる a, m, r を考えるとき, 次の定理が成り立つ。

定理5. $m' \equiv m \pmod{r}$ かつ $r < m' < 2r$ とするとき,

$$m'-r \equiv \pm 1 \pmod{2r-m'}$$

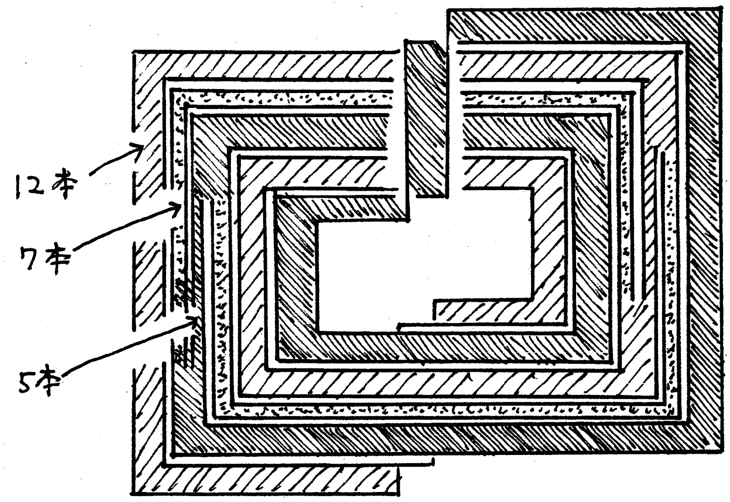
が成立するならば, $\ell(2am \pm r, 2m; m)$ は a slice link in the weak sense である。

例. $a=2.\ m=12.\ r=7$ で $2n+1=2am+r$ の場合: $\ell(55.24;12)$

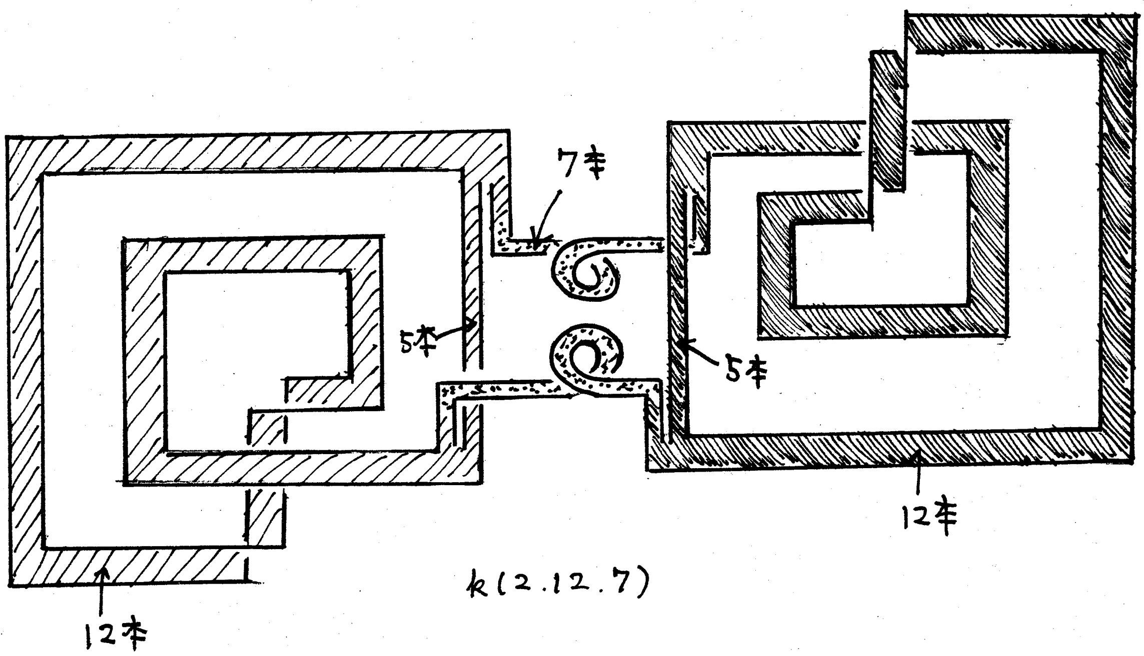


$\ell(55,24;12)$ 　　図3 　　$k(2.12;7)$

$l(55, 24; 12)$ に図2と同じ fusion を12回ほどこして図3の右の結び目 $k(2,12,7)$ にする。$k(2,12,7)$ を図4の上のように上を通る線と下を通る線に分けて，図4の下のようにずらし，ねじれを調節して図5のようにする。

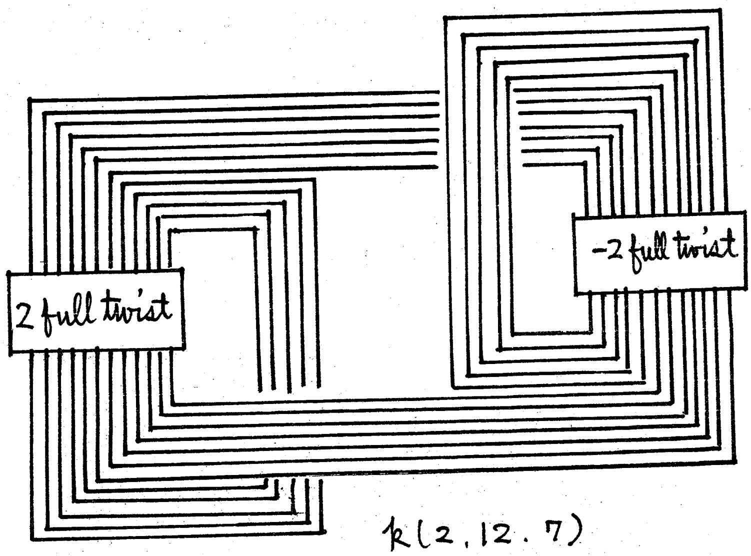


$k(2.12.7)$



$k(2.12.7)$

図4



k(2, 12, 7)

図 5

図5の真中に縦に通る左右5本ずつの線を ~~fusion~~ fission band でつなぎ, ~~fusion~~ fission をすることにより, 左右の twist を解消するようにする。そこで, fission band のつなぎ方が問題となる。この場合は図6のようにつなぎ, fission する。

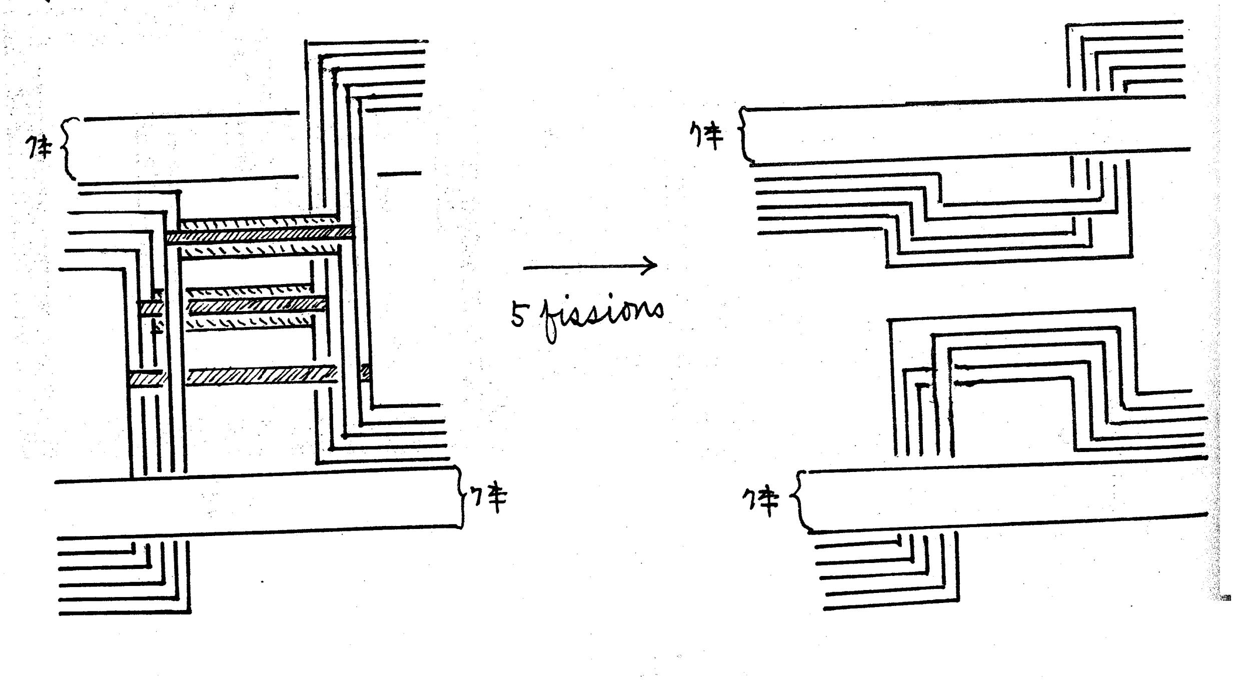


図 6

この5回の fission で components が6のからみ目になるが，そのうち4つの components は容易に分離し，図7の下のからみ目が残る。

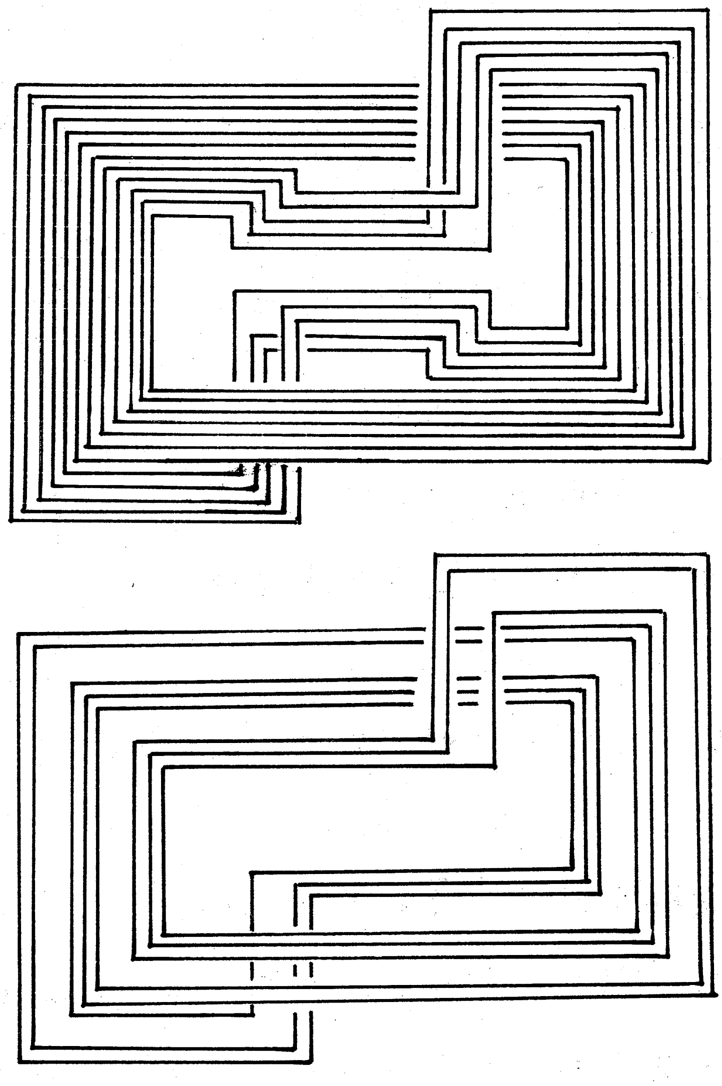
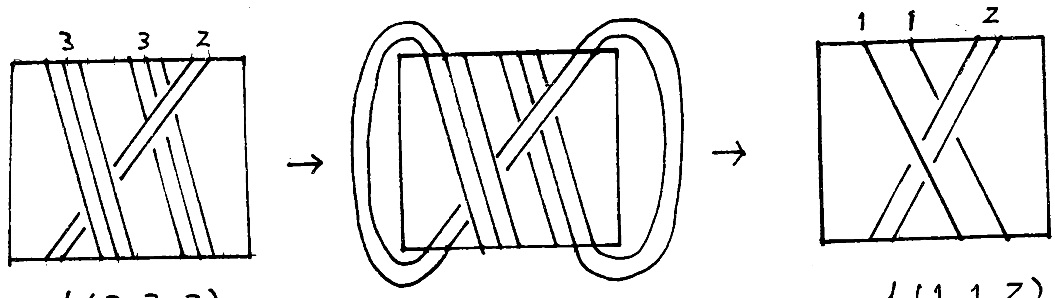


図 7

図7の下に残ったからみ目が components が2の平凡なからみ目になることがわかれば，$k(2,12,7)$ が a slice knot になることがわかり，最初の $l(55,24;12)$ が a slice link in the weak sense であることが示されたことになる。

図7の下のからみ目は、一般には複雑になるが、これをbraidになおしてみると、図8の(ア)となる。このbraidをb(3,3,2)で表すことにする。b(3,3,2)は一部を上下つなぐ操作でb(1,1,2)に変形される。

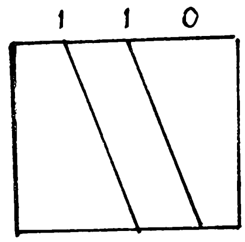


b(3,3,2)
(ア)

図8

b(1,1,2)

b(1,1,2)は最後はb(1,1,0)と右図のようになり，平凡なからみ目であることがわかる。



k(2,12,7)は上の証明ではribbon knotになっていることもわかる。

一般的に困難な点は、最初のfusionをどのようにしたらよいか？，という点と，次に図6で示したfission bandをどのようにつけたらよいか？という点がある。そのため，定理5のような条件がつけられた。

最初のfusionを同じようにした場合，fission bandをどのようにつけてもうまくいかない例もあるので，問題の解決は，更に工夫が必要である。

定理の証明など省略したものが多いが、詳細は[10]を参照されたい。

References

[1] D.B.A. Epstein : Embedding punctured manifolds, Proc. Amer. Math. Soc., 16 (1965), 175~176.

[2] R.H. Fox : Some problems in knot theory, Topology of 3-Manifolds and Related Topics (M.K. Fort, Jr. (ed.)), Prentice Hall, N.J., (1962), 168~176

[3] W. Hantzsche : Einlagerung von Manigfaltigkeiten in Euklidische Räume, Math. Z., 43 (1938), 38~58.

[4] F. Hosokawa and A. Kawauchi : Proposals for unknotted surfaces in four-spaces, Osaka J. Math., 16 (1979), 233-248.

[5] A. Kawauchi, T. Shibuya and S. Suzuki : Descriptions on surfaces in four-space I, Normal forms, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 10 (1982), 75~125.

[6] H. Schubert : Knoten mit zwei Brücken, Math. Z., 65 (1950), 133~170.

[7] H. Seifert und W. Threlfall : Lehrebuch der Topologie, Teubner, Leipzig-Berlin, (1934)

[8] S. Suzuki : Knotting problems of 2-spheres in 4-sphere, Math. Sem. Notes Kobe Univ., 4 (1976), 241-371

[9] E. C. Zeeman : On twisting spun knot, Trans. Amer. Math. Soc., 115 (1965), 471~495.

[10] F. Hosokawa and S. Suzuki : On Punctured Lens Spaces in 4-Space, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 10 (1982) 323-344.